Das Maß aller Dinge aus mathematischer Sicht – zu den Grundideen der Integralrechnung

Reinhard Winkler (TU Wien)

Zusammenfassung

Ob ein bestimmter mathematischer Themenkreis für den Unterricht – sei es in der Schule oder im Rahmen eines Universitätsstudiums – geeignet ist, wird davon abhängen, wie sehr einerseits damit grundlegende und interessante Inhalte vermittelt werden können, und andererseits, welchen Aufwand dies erfordert. Bei nur wenigen mathematischen Themen liegen die Dinge so günstig wie bei der Maß- und Integrationstheorie. Man muss lediglich den sehr simplen und auf der Hand liegenden Begriff des Maßes explizit machen und die ebenso höchst plausible Existenz eines natürlichen Maßes (des Lebesgueschen) festhalten. Feinsinnige Messbarkeitsfragen können zunächst getrost einmal beiseite gelassen und auf später verschoben werden. Auf Basis des Maßes ergibt sich der Begriff des Lebesgueschen Integrals nämlich durch geringfügige (wenn auch entscheidende) Modifikation des Riemannschen. Die vertrauten Gesetze und Methoden der Integralrechnung gelten im Wesentlichen unverändert.

In diesem Artikel behandle ich die Grundgedanken dazu. Das inkludiert die Darstellung oder wenigstens Andeutung der wesentlichen Beweisideen, insbesondere zur Konstruktion des Lebesgueschen Maßes. Außerdem diskutiere ich die Vorzüge des Lebesgueschen Integralbegriffs im Vergleich mit dem Riemannschen. Sie sind dafür verantwortlich, dass sich in der mathematischen Fachliteratur die Lebesguesche Theorie eindeutig durchgesetzt hat. Schließlich gebe ich einige über das Elementare hinausreichende Ausblicke.

Für Mathematiklehrerinnen und -lehrer ist all das ein Hintergrundwissen, das für eine adäquate Schwerpunktsetzung schon bei relativ einfachen Flächenberechnungen und erst recht in der Integralrechnung unerlässlich ist. Hinsichtlich der Stoffauswahl für den Unterricht selbst will ich aber Entwarnung geben: Als Universitätslehrer bin (bzw. wäre) ich zufrieden, wenn zu Studienbeginn wenigstens ein nachhaltiges Verständnis des Riemannschen Integralbegriffs, wie er im Lehrstoff der Höheren Schulen vorgesehen ist, mitbracht wird (bzw. würde).

1 Einleitung

Ich erinnere mich noch an eine Sammlung von Spielzeugbausteinen aus Holz, mit denen ich als kleines Kind spielte. Sie waren alle quaderförmig, und die Längen ihrer Kanten waren Vielfache einer gemeinsamen Einheit. Auch die Abmessungen der Holzkiste, in die ich die Steine einschlichten wollte, waren Vielfache dieser Einheit. Für fast alle Steine war Platz, nur ein einziger Stein ragte aus der Kiste heraus. Allerdings hielt mich das nicht davon ab, die Steine umzuschlichten in der Hoffnung, dass sich bei anderer Anordnung alles ausgehen könnte. Anscheinend hatte ich damals etwas noch nicht verstanden, was uns jetzt selbstverständlich erscheint und mit dem Begriff des Volumens zu tun hat. Heute jedenfalls brächte ich die Hartnäckigkeit, es immer wieder mit Umschlichten zu versuchen, nicht mehr auf. Doch warum nicht?

Mein damaliges Problem hat offenbar mit Zählen und Messen zu tun, jenen beiden fundamentalen Funktionen unseres Intellekts, die nicht nur damals für mich persönlich, sondern wahrscheinlich schon in prähistorischer Zeit die Ursprünge aller Mathematik waren. Es lohnt, diesen Themenkomplex näher unter die Lupe zu nehmen.

Das Zählen und somit die natürlichen Zahlen habe ich vor einigen Jahren ins Zentrum meines Artikels [6] gestellt. Für das Messen kontinuierlicher Größen sind die reellen Zahlen, um die es in [7] geht, das universelle Bezugssystem. Im vorliegenden Artikel möchte ich nun das Messen selbst zum Gegenstand machen.

Egal ob Längen-, Flächen- oder Volumsmessungen in ihrer ursprünglichen geometrischen Bedeutung oder die Messung von Wahrscheinlichkeiten oder anderen Größen in den Anwendungen: All diesen Vorgängen liegt ein gemeinsamer begrifflicher Kern zugrunde, von dem die Maßtheorie handelt. Sie ist nur mäßig abstrakt und geht auch in ihrer modernen Fassung hinsichtlich der Grundideen nur an wenigen (aber entscheidenden) Stellen über das elementar Vertraute hinaus. Entsprechend ist es auch in dem begrenzten Rahmen dieses Artikels möglich, das Wichtigste ohne größere Lücken darzustellen. (Kleinere Lücken übersteigen kaum den Schwierigkeitsgrad von Übungsaufgaben aus dem ersten Studienabschnitt.)

Bemerkenswerterweise hat sich die Maßtheorie als eigenständiger Zweig der Analysis erst im 20. Jahrhundert voll herausgebildet; und dies trotz bedeutender Beiträge schon in der griechischen Antike, insbesondere von Eudoxos (4. Jh. v. Chr.) und Archimedes (3. Jh. v. Chr.). Auch die Integralrechnung, wie sie sich im Rahmen der wissenschaftlichen Revolution der frühen Neuzeit entwickelt hat, hatte eine andere Stoßrichtung. (Für eine historische Gesamtschau verweise ich z.B. auf [8].) In der Epoche von Leibniz (1646-1716) und Newton (1642-1727) bis hin zu Riemann (1826-1866) standen, dem damaligen Integralbegriff entsprechend, reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ im Mittelpunkt, deren Werte gewissermaßen infinitesimal aufsummiert werden. Aber erst Anfang des 20. Jahrhunderts wurde durch die Lebesguesche Theorie klar, dass dem Integral sinnvollerweise ein stärker mengentheoretisch orientierter Maßbegriff zu unterlegen ist. In der Sprache reeller Funktionen bedeutet das: Wir brauchen auf der x-Achse nur eine maßtheoretische Struktur, während die ordnungstheoretische sekundär ist.

Abschnitt 2 ist hauptsächlich der Motivation dieser Einsicht gewidmet. Danach wird in Abschnitt 3 geklärt, was genau unter einem Maß zu verstehen ist. Und zwar ist ein Maß – so wie viele Objekte der Mathematik – ein Beispiel einer Funktion oder auch Abbildung; in diesem Fall einer solchen, die gewissen (möglichst vielen) Mengen (die wir die messbaren nennen) eine reelle Zahl als Maß zuordnet, zum Beispiel ebenen geometrischen Figuren ihr Flächenmaß. Interessanter als einzelne Funktionswerte ist eine sehr naheliegende Eigenschaft, die solch einer Funktion als ganzer zukommt: die Additivität. Dass sich diese Eigenschaft sogar zur sogenannten σ-Additivität verschärfen lässt, verleiht der entstehenden Theorie unverhoffte Tiefe und ist der Ausgangspunkt der modernen Maßtheorie, insofern sie sich von ihren Vorläufern bis ins 19. Jahrhundert unterscheidet. Entsprechend liegt der Kern der anzustellenden Überlegungen vor allem im Beweis, dass Maße mit den gewünschten Eigenschaften überhaupt existieren. Dem ist vor allem Abschnitt 4 gewidmet, wo ich versuche, einen solchen Existenzbeweis möglichst überschaubar darzustellen. Die dort skizzierte Konstruktion liefert das Lebesguesche Maß (benannt nach Henri Lebesgue, 1875-1941), das noch einige weitere interessante Eigenschaften hat, die in Abschnitt 5 diskutiert werden. Mit Hilfe eines beliebigen Maßes lässt sich, so wie es Inhalt von Abschnitt 6 ist, sehr leicht das Integral (bezüglich dieses Maßes) definieren. Im Falle des Lebesgueschen Maßes spricht man vom Lebesgueschen Integral. Abschnitt 7 bringt einen Vergleich dieses neuen Integralbegriffs mit dem Riemannschen. Dieser Vergleich fällt recht eindeutig aus, und zwar zugunsten des Lebesgueschen. Dennoch kann im Mathematikunterricht weiterhin mit dem Riemannschen Integral gearbeitet werden. Dies begründe ich in Abschnitt 8 ebenso wie meine Überzeugung, dass Fachlehrkräfte der Mathematik dennoch mit den hier darzulegenden Grundzügen der Lebesgueschen Theorie vertraut sein müssen. Einer davon liegt in faszinierenden Ausblicken, die sich mit der Maßtheorie erschließen und die ich im abschließenden Abschnitt 9 andeuten möchte.

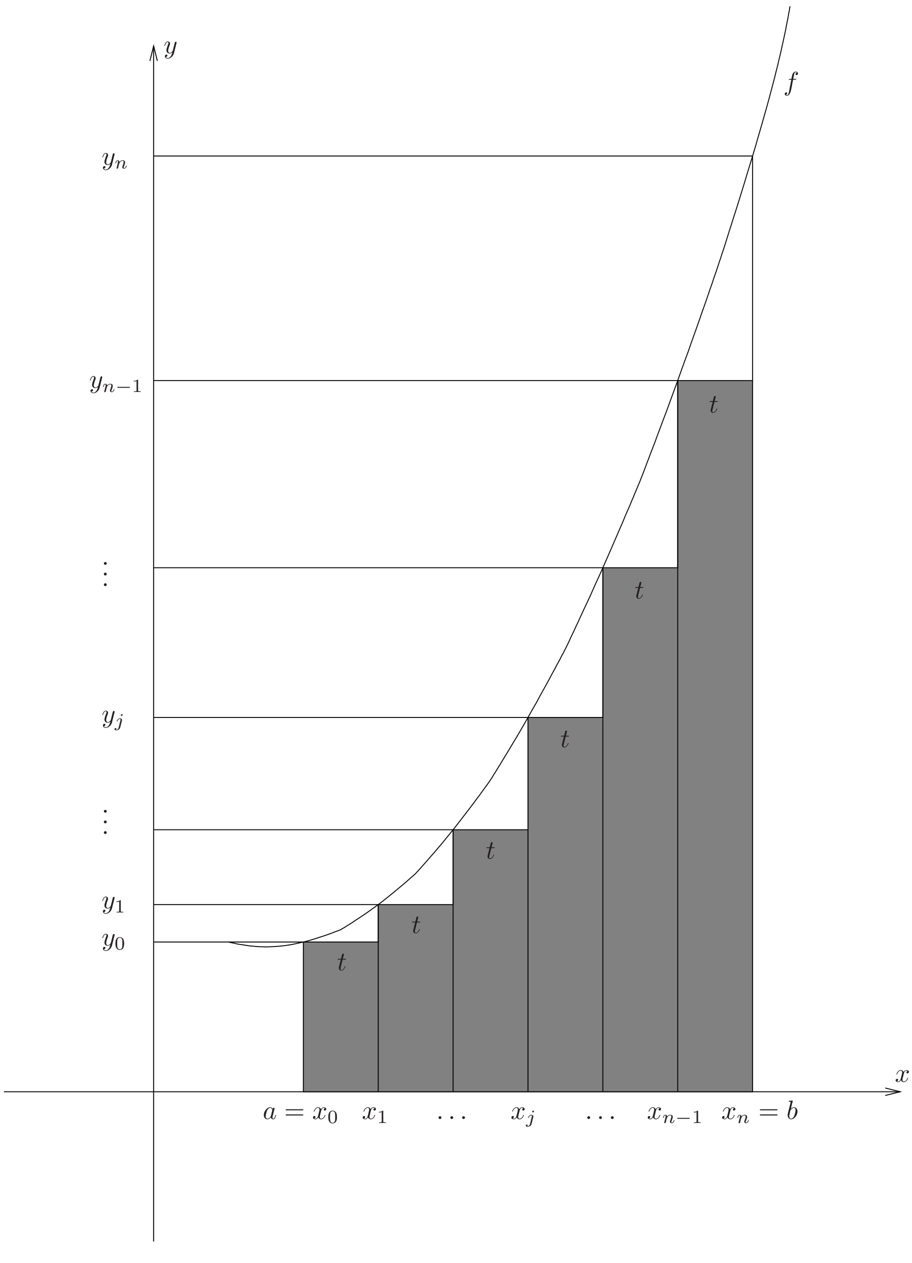
2 Ein Bild — drei Zugänge

Bei der Berechnung von Flächen mit krummer Begrenzung verwendet man bekanntlich Approximationen durch leicht berechenbare Vereinigungen von Rechtecksflächen. Lässt man – so die Grundidee – hinreichend kleine Rechtecke zu, so kann der Fehler (hoffentlich) unter eine beliebig vorgegebene positive Fehlerschranke gedrückt werden.

In der Schule wird dies systematisch im Rahmen der Integralrechnung behandelt, wo eine der Begrenzungslinien der zu berechnenden Fläche krummlinig und durch den Graphen einer Funktion $f \geq 0$ gegeben ist. Die drei anderen Begrenzungen sind geradlinig: die waagrechte x-Achse mit der Gleichung $y = 0$ und zwei senkrechte Geradenstücke, die den Gleichungen $x = a$ bzw. $x = b$ genügen. Die gesuchte Fläche ist durch das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gegeben. Eine Approximation von innen wäre beispielsweise die graue Fläche in der nachfolgenden Abbildung.



Ich bezeichne mit t jene Treppenfunktion, die auf jedem der Teilintervalle $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, n$, den konstanten Wert $y_{j-1} = \inf\{f(x) : \ x \in I_j\}$ annimmt. (Die Werte an den Unterteilungspunkten x_j dürfen wir bei der Flächenbestimmung vernachlässigen.) Nützlich ist die Schreibweise $\mathbf{1}_A$ für die charakteristische Funktion einer Menge A, welche allen $x \in A$ den Wert $\mathbf{1}_A(x) = 1$ zuweist, allen übrigen x aus der Definitionsmenge (die meist aus dem Kontext klar ist) den Wert $\mathbf{1}_A(x) = 0$. Dann lässt sich t als Linearkombination

$$t = \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \mathbf{1}_{I_j}$$

schreiben. Die graue Fläche F lässt sich einerseits als Integral $\int_a^b t(x)\,dx$ deuten, andererseits setzt sie sich in elementarer Weise aus Rechtecksflächen zusammen. Ich möchte drei Arten hervorheben, wie F interpretiert und als Formel geschrieben werden kann:

1. F ist die Summe der Rechtecksflächen mit den Grundseiten $x_j - x_{j-1}$ und den Höhen $y_j = t(\xi_j)$, also
$$F = \sum_{j=1}^{n} t(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),$$
wobei ξ_j ein beliebiger Punkt aus I_j sein darf. Diese Formel entspricht einer Unterteilung der x-Achse und somit der Idee einer Riemannschen Untersumme für f.

2. Im Beispiel der Abbildung liegen im Intervall I_j die Werte von f zwischen y_{j-1} und y_j. Bezeichnen wir mit λ das Längenmaß, so können wir also auch schreiben:
$$F = \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \lambda(\{x : \ y_{j-1} \leq f(x) < y_j\})$$
Diese Formel ergibt sich also aus einer Unterteilung der y-Achse bei den y_j, was wiederum der Grundidee des Lebesgueschen Integrals entspricht, wohlgemerkt auf Basis eines Maßbegriffes.

3. Lassen wir auch das zweidimensionale Flächenmaß $\lambda^{(2)}$ zu, so können wir noch direkter schreiben:
$$F = \lambda^{(2)}\left(\{(x,y) : \ x \in [a,b], \ 0 \leq y \leq t(x)\}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(2)}(R_j),$$
wobei die $R_j = [x_{j-1}, x_j] \times [0, y_{j-1}]$ jene Rechtecke sind, die in der Zerlegung der zu berechnenden Fläche auftreten. Diese Formel motiviert uns, auch drei- und sogar höherdimensionale Maße in Betracht zu ziehen.

Auch wenn in den bisherigen Überlegungen hin und wieder eingeflossen ist, dass die Funktion f in der Skizze auf $[a,b]$ streng monoton und positiv ist, so erweisen sich diese Besonderheiten als so wenig einschränkend, dass sich die drei obigen Formeln alle als Ausgangspunkte für tragfähige Theorien erweisen.

Der Begriff des Riemann-Integrals darf hier als vertraut vorausgesetzt werden, und ich widme mich gleich dem Lebesgueschen Zugang. An geeigneten Stellen und in aller Kürze werde ich zum Vergleich aber auch zum Riemann-Integral das Wichtigste wiederholen.

3 Der Begriff des Maßes

Längen- wie auch Flächenmaß haben einen abstrakten Kern gemeinsam, der quer durch die Mathematik derart bedeutend ist, dass ich auch im Titel dieses Artikels darauf angespielt habe. Der Grundgedanke jeglichen Messens ist jedem Kind klar, wenn auch nicht in dieser begrifflich präzisierten Form: Gewissen Objekten A wird ein meist nichtnegativer Zahlenwert $\mu(A)$ zugeordnet (wir werden auch den Wert ∞ zulassen) derart, dass der Wert für die Vereinigung zweier nicht überlappender Objekte die Summe der einzelnen Werte zu sein hat. Die Zuordnung μ hat also **additiv** zu sein, d.h. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ zu erfüllen, sofern $A \cap B = \emptyset$. Insbesondere ist μ demnach eine Funktion, deren Definitionsbereich aus Objekten $A, B, \ldots$ besteht, die als Mengen (bei geometrischer Interpretation: Mengen von Punkten) deutbar sind. X sei eine gemeinsame

Obermenge aller dieser Mengen. Der Definitionsbereich von μ ist dann eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ (der Menge aller Teilmengen von X) und werde mit $\mathcal{A}$ bezeichnet. Die Forderungen an $\mathcal{A}$ und μ sind naheliegend:

Definition: *Sei X eine beliebige Menge. Ein System $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) = \{A : \ A \subseteq X\}$ heißt* **Mengenalgebra** *(auf X), falls gilt:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$.*
2. *$X \setminus A \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*
3. *Aus $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ folgt stets, dass auch $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.*

(Wegen $A_1 \cap A_2 = X \setminus ((X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2))$ folgt aus 2. und 3. dass $\mathcal{A}$ auch gegenüber Durchschnitten abgeschlossen ist.)

Ein **endlich additives Maß** *(oder auch* **Inhalt***) auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$, die überdies (endlich)* **additiv** *ist, d.h.*

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ erfüllt.

(Mit dem Wert ∞ ist gemäß offensichtlichen Regeln wie $\infty + c = \infty$, $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ für $c > 0$ etc. zu rechnen. Werte wie $\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ sind allerdings nicht definiert.)

Es überrascht nicht, dass elementare Längen-, Flächen- und Volumsbegriffe als endlich additive Maße aufgefasst werden können, zum Beispiel indem man sich in erster Annäherung auf die Messung solcher Bereiche konzentriert, die sich aus endlich vielen Intervallen, Rechtecken oder Quadern zusammensetzen. Etwas mehr mag überraschen, dass bei genauerer Analyse schon in elementarem Kontext gewisse Überlegungen zur Wohldefiniertheit erforderlich sind, siehe Abschnitt 4, Konstruktionsschritte 2 und 3. Auf dieser Grundlage kann man z.B. für die Flächenmessung auch krummlinig begrenzte Bereiche in Betracht ziehen, die sich, in Analogie zur Approximation eines Integrals durch Treppenfunktionen wie in Abschnitt 2 beliebig gut approximieren lassen, z.B. Kreisscheiben etc. Ist dies für einen gegebenen Bereich sowohl von innen als auch von außen möglich, so heißt dieser Bereich **Jordan-messbar**. Die eigentlich spannende Frage lautet aber: Lassen sich diese Konzepte sinnvoll auch auf kompliziertere Mengen ausdehnen? Die Antwort lautet: Ja, allerdings nicht auf beliebige Mengen, sondern nur auf die sogenannten **Lebesgue-messbaren Mengen**. All das soll in diesem Artikel näher untersucht werden.

Eine der wirkungsmächtigsten Erkenntnisse der Mathematik vor knapp mehr als 100 Jahren bestand darin, dass man die Additivität der Funktion μ zur sogenannten **σ-Additivität** verschärfen kann, wo nicht nur Vereinigungen von zwei (und somit von endlich vielen) Mengen betrachtet werden, sondern auch von einer unendlichen Mengenfolge, d.h. von abzählbar vielen disjunkten Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$. (Für die Kerngebiete der Mathematik ist das der vielleicht wichtigste Aspekt der Entdeckung überabzählbarer Mengen durch Georg Cantor, 1845-1918.) Die für das Folgende grundlegenden Definitionen lauten also:

Definition: *Eine Mengenalgebra $\mathcal{A}$ auf X heißt* **σ-Algebra** *(auf X), falls aus $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ gilt. (Ähnlich wie zuvor sieht man, dass $\mathcal{A}$ auch abgeschlossen bezüglich abzählbarer Durchschnitte ist.) Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen in diesem Zusammenhang* **messbare Mengen**.

Ein Inhalt μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt **Maß***, falls μ sogar* **σ-additiv** *ist, d.h. falls für alle Folgen von Mengen $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, die $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ erfüllen, die Gleichung*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

gilt.

Ein Wort zur unendlichen Summe in der Definition ist angebracht: Definitionsgemäß ist der Wert einer unendlichen Summe der Grenzwert ihrer Partialsummen, die ihrerseits von der Reihenfolge der Glieder abhängen. Da bei Maßen alle Summanden nichtnegativ sind, hängt jedoch in unserem Fall der Grenzwert der Summe – endlich oder unendlich – nicht von dieser Reihenfolge ab. Ließe man allerdings als Werte von μ auch negative oder komplexe Zahlen zu, so müsste die Unabhängigkeit von der Reihenfolge explizit vorausgesetzt werden und hätte die absolute Konvergenz aller auftretenden konvergenten Reihen zur Folge.

Es bedarf keiner außergewöhnlichen Phantasie, obige Definitionen auszusprechen. Nichttrivial jedoch ist die Tatsache, dass die in der Mathematik auftretenden elementaren Maße (Längen, Flächen, Volumina, Wahrscheinlichkeiten), wie sie schon seit Jahrtausenden verwendet werden, zu σ-additiven Maßen im Sinne obiger Definition fortgesetzt werden können. Wie genau dies möglich ist, soll uns nun näher beschäftigen.

4 Die Konstruktion des Lebesgueschen Maßes

Wer die folgenden Hauptgedanken in etwas rigoroserer und entsprechend ausführlicherer Darstellung bevorzugt, möge z.B. zu [1] von Walter Rudin (1921-2010) greifen, dessen Analysis-Lehrbücher mittlerweile weltweit als Klassiker gelten.

Man überblickt die Konstruktion des s-dimensionalen Lebesgueschen Maßes ($s \in \{1, 2, \ldots\}$ fest), das ich mit $\lambda = \lambda^{(s)}$ bezeichne, sehr leicht, wenn man sie in folgende Schritte gliedert.

1. Schritt. Rechtecke und ihr Inhalt: Zunächst vereinbaren wir, dass die Schreibweise $\langle a, b\rangle$ jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b bezeichne, egal ob a und/oder b selbst zu I gehören oder nicht (formal: $\{x: \ a < x < b\} \subseteq I \subseteq \{x: \ a \leq x \leq b\}$). Diese Ungenauigkeit betreffend die Menge I wird, wie man sich leicht klarmachen kann, bei den folgenden Festlegungen zu keinen Widersprüchen führen. Unter einem s-dimensionalen (verallgemeinerten) Rechteck oder Quader R wollen wir das kartesische Produkt von s Intervallen $I_j = \langle a_j, b_j\rangle$, $j = 1, \ldots, s$, verstehen, also

$$R = \prod_{j=1}^{s} \langle a_j, b_j\rangle = \prod_{j=1}^{s} I_j = \{(x_1, \ldots, x_s): \ x_j \in I_j \text{ für } j = 1, \ldots, s\}.$$

Sofern $a_j < b_j$ für alle j gilt, definieren wir für solche Rechtecke R den s-dimensionalen Inhalt λ_0 durch

$$\lambda_0(R) = \prod_{j=1}^{s} (b_j - a_j).$$

Andernfalls setzen wir $\lambda_0(R) = 0$.

2. Schritt. Elementarmengen $E \in \mathcal{E}$ und ihr Inhalt $\lambda_0(E)$: Eine Elementarmenge E sei definitionsgemäß eine Menge, die als endliche Vereinigung $E = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ von Rechtecken R_i dargestellt werden kann. Mit $\mathcal{E}$ sei das System aller Elementarmengen bezeichnet, mit $\mathcal{E}_1 = \{E \in \mathcal{E}: \ E \subseteq [0,1]^s\}$ jener, die im s-dimensionalen Einheitswürfel (-quadrat, -intervall) $[0,1]^s$ enthalten sind. Sind die R_i paarweise disjunkt, so setzen wir

$$\lambda_0(E) = \lambda_0\left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_0(R_i).$$

So naheliegend diese Festsetzung auch ist, zu ihrer Rechtfertigung sind einige Überlegungen notwendig. Es handelt sich dabei keinesfalls um ein Spezifikum des Lebesgueschen Maßes, sondern um Gedanken, die auch jedem elementaren Flächenbegriff zugrunde liegen. Meiner Meinung nach sollten sie daher im Schulunterricht nicht übergangen werden. Ich fasse sie im nächsten Schritt zusammen.

3. Schritt. Nachweis, dass λ_0 ein Inhalt auf $\mathcal{E}_1$ ist: Man mache sich die Bedeutung nachfolgender Aussagen, die ich in der Folge auch immer wieder verwenden werde, klar. Es geht dabei um nicht gänzlich triviale Fragen der Wohldefiniertheit. Erst durch sie wird klar, dass die Definition von λ_0 im 2. Schritt korrekt war und dass es sich bei λ_0 wirklich um einen Inhalt handelt;

- Jedes $E \in \mathcal{E}$ besitzt eine Darstellung als Vereinigung von Rechtecken, die sogar paarweise disjunkt gewählt werden können. (Beweisidee: Die Darstellung verfeinern, d.h. die R_i einer zunächst nicht disjunkten Darstellung entlang der Koordinaten der auftretenden Ränder weiter unterteilen.)
- $\mathcal{E}_1$ ist eine Mengenalgebra auf $[0,1]^s$, insbesondere abgeschlossen bezüglich der Bildung von Komplementen und Vereinigungen (also auch Durchschnitten).
- Obwohl im Regelfall verschiedene disjunkte Darstellungen existieren, führen alle zum selben Wert für $\lambda_0(E)$. (Beweisidee: Aus dem Distributivgesetz folgt, dass sich der Wert bei Verfeinerungen von Rechtecken und somit generell von elementaren Mengen nicht ändert. Für zwei beliebige Darstellungen betrachtet man eine gemeinsame Verfeinerung, woraus die Gleichheit der Summen folgt. Erst dadurch ist die Wohldefiniertheit von λ_0 sichergestellt. Man überlege sich an dieser Stelle den Zusammenhang mit der Anekdote mit den Spielzeugbausteinen zu Beginn der Einleitung.)
- λ_0 ist additiv. (Folgt aus der Wohldefiniertheit.)
- $0 \leq \lambda_0(E) \leq 1$ für alle $E \in \mathcal{E}_1$. (Folgt wegen $1 = \lambda_0([0,1]^s) = \lambda_0(E) + \lambda_0([0,1]^s \setminus E)$ aus der Additivität.)

4. Schritt. Definition des äußeren Maßes λ^*: Erst jetzt gehen wir über elementare Konstruktionen hinaus, indem wir für beliebige Mengen $A \subseteq [0,1]^s$

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} \lambda_0(E_n) : \ E_n \in \mathcal{E} \text{ offen für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} E_n \right\}$$

setzen. λ^* ist ein sogenanntes äußeres Maß auf $X = [0,1]^s$, was definitionsgemäß bedeutet, dass $\lambda^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ nicht notwendig additiv, sondern nur subadditiv ist (d.h. $\lambda^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)$ für alle Folgen von Mengen $A_n \subseteq [0,1]^s$, $n \in \mathbb{N}$) mit $\lambda^*(\emptyset) = 0$. (Beweisidee: Für jedes A_n wähle man eine offene Überdeckung durch $E_k^{(n)} \in \mathcal{E}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_0(E_k^{(n)}) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \varepsilon$.)

5. Schritt. Die Pseudometrik $d(A,B) = \lambda^*(A \triangle B)$: Bezeichne wie üblich $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz der Mengen A und B. Dann nimmt $d(A,B) = \lambda^*(A \triangle B)$ nur nichtnegative Werte an mit $d(A,A) = 0$, ist symmetrisch (d.h. $d(A,B) = d(B,A)$) und erfüllt wegen $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$ und der Subadditivität die Dreiecksungleichung $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. Und das ist schon alles, was von einer Pseudometrik verlangt wird.

6. Schritt. Definition von $\mathcal{A}_1$ als Abschluss von $\mathcal{E}$ bzgl. d: Ein entscheidender Schritt ist die Definition des Mengensystems

$$\mathcal{A}_1 = \{A \subseteq [0,1]^s : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists E \in \mathcal{E}_1 : \ d(A,E) < \varepsilon\}.$$

$\mathcal{A}_1$ lässt sich deuten als topologischer Abschluss von $\mathcal{E}_1$ in $\mathcal{P}([0,1]^s)$ bezüglich der Pseudometrik d, denn offenbar liegt $A \subseteq [0,1]^s$ definitionsgemäß genau dann in $\mathcal{A}_1$, wenn es in jeder ε-Umgebung $\mathcal{U}$ (bzgl. d) von A eine elementare Menge $E \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{U}$ gibt.

7. Schritt. Die Einschränkung λ_1 von λ^* auf $\mathcal{A}_1$ ist σ-additiv: Technische Hauptarbeit, erster Teil. (Für den Beweis ist hier einige Arbeit mit diversen ε_n und konvergenten Reihen etc. nötig, jedoch nur solides analytisches Handwerk, kaum nennenswerte neue Ideen.)

8. Schritt. $\mathcal{A}_1$ ist eine σ-Algebra: Technische Hauptarbeit, zweiter Teil. (Der Beweis erfolgt gemeinsam mit dem für den 7. Schritt.)

9. Schritt. Auf $\mathcal{E}_1$ stimmt λ_1 mit λ_0 überein: Nur auf den ersten Blick mag diese Aussage trivial erscheinen. In ihrem Beweis fließen die Kompaktheit von $[0,1]^s$ ein und dass in der Definition des äußeren Maßes im 4. Schritt *offene* Überdeckungen verwendet wurden. Dadurch lässt sich nämlich alles auf endliche Überdeckungen $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} E_n$ und elementare Eigenschaften von λ_0 aus dem 3. Schritt zurückführen.

10. Schritt. Ausdehnung des Maßes λ_1 auf ganz $\mathbb{R}^s$: Diese erfolgt in offensichtlicher Weise, indem man die bereits vorhandene Struktur auf $[0,1]^s$ vermittels ganzzahliger Vektoren verschiebt und somit ganz $\mathbb{R}^s$ erfasst. Formal: Eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^s$ ist genau dann **Lebesgue-messbar**, wenn alle ihre Schnittmengen $A_{(k_1,\ldots,k_s)} = A \cap ((k_1,\ldots,k_s) + [0,1]^s)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, es sind, nachdem man sie mit dem Vektor $-(k_1,\ldots,k_s)$ in den Einheitswürfel $[0,1]^s$ verschoben hat. In diesem Fall ist $\lambda(A) = \sum_{(k_1,\ldots,k_s)\in\mathbb{Z}^s} \lambda_1(A_{(k_1,\ldots,k_s)} - (k_1,\ldots,k_s))$ zu setzen. Sämtliche Lebesgue-messbaren Mengen bilden wieder eine σ-Algebra.

Die ersten drei Schritte beinhalten Überlegungen, um die man schon bei elementaren Zugängen zum gewöhnlichen Flächenmaß nicht umhinkommt. Die entscheidenden neuen Ideen liegen in den Definitionen von λ^* und $\mathcal{A}_1$ im 4. und 6. Schritt. Vergleichsweise trivial sind der 5. und der 10. Schritt. Die beweistechnische Hauptarbeit ist im 7. und 8. Schritt zu leisten, grundsätzliche Schwierigkeiten treten dabei jedoch nicht auf. Wer nach den entscheidenden Hintergründen sucht, wird vermutlich den 9. Schritt am interessantesten finden, weil dort besonders deutlich wird, wie der Lebesguesche Maßbegriff sich zu elementareren Zugängen verhält und welche Rolle die Topologie spielt.

5 Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes

Das in Abschnitt 4 konstruierte Lebesguesche Maß λ hat einige weitere interessante und teilweise etwas tiefer liegende Eigenschaften, die in der Maßtheorie eine wichtige Rolle spielen und die ich deshalb ausdrücklich erwähnen möchte.

Vollständigkeit: Ist $A \in \mathcal{A}$ eine Lebesgue-Nullmenge, d.h. $\lambda(A) = 0$ und $B \subseteq A$, so ist auch $B \in \mathcal{A}$ (und natürlich $\lambda(B) = 0$). Diese Eigenschaft ergibt sich ziemlich unmittelbar aus der Konstruktion von λ. Aber auch nicht vollständige Maße können leicht vervollständigt werden. Man braucht zur σ-Algebra, auf der das Maß definiert ist, nur all jene Mengen hinzuzufügen, die sich von einer geeigneten messbaren Menge lediglich um eine Teilmenge einer Nullmenge unterscheiden.

Borel-Eigenschaft: (nach Émile Borel, 1871-1956) Die σ-Algebra $\mathcal{A}$, auf der λ definiert ist, enthält alle (offenen) Intervalle (für $s = 1$) bzw. alle verallgemeinerten Rechtecke (für $s \geq 2$). Jede beliebige offene Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^s$ lässt sich als abzählbare Vereinigung offener Rechtecke R (etwa aller $R \subseteq O$ mit rationalen Randkoordinaten) schreiben. Also enthält $\mathcal{A}$ alle offenen Mengen und damit auch deren Komplemente, die abgeschlossenen Mengen. Die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ mit dieser Eigenschaft heißt auch die Borelalgebra. Ihre Elemente heißen Borelmengen und jedes Maß, das für alle Borelmengen definiert ist, heißt Borelmaß. Also ist λ ein Borelmaß (so wie übrigens die allermeisten interessanten Maße, die in der Mathematik auftreten).

Wie sich zeigen lässt, ist $\mathcal{A}$ hinsichtlich Kardinalität größer als $\mathcal{B}$: $|\mathcal{B}| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{A}|$. In einem anderen Sinne jedoch scheint der Unterschied gering: Zu jeder Lebesgue-messbaren Menge A gibt es eine Borelmenge B mit $\lambda(A \triangle B) = 0$. λ ist also die Vervollständigung seiner Einschränkung auf $\mathcal{B}$. Übrigens kann man in obiger Aussage B sogar sehr speziell wählen, nämlich als sogenannte F_σ- oder G_δ-Menge. Darunter versteht man eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener bzw. einen abzählbaren Durchschnitt offener Mengen.

Regularität: Bei elementaren Überlegungen zur Berechnung von Flächen wie in Abschnitt 2 wird ein zu berechnender krummlinig begrenzter Bereich von innen und außen durch endliche Vereinigungen von Rechtecksflächen approximiert. Dies ist zwar nicht für beliebige Lebesgue-messbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^s$ möglich, sehr wohl aber eine Variante, bei der man andere Klassen approximierender Mengen verwendet. Denn $\lambda(A)$ ist das Supremum aller $\lambda(K)$, wobei K alle kompakten Teilmengen $K \subseteq A$ durchläuft, und analog das Infimum aller $\lambda(O)$, wobei O alle offenen Obermengen $O \supseteq A$ durchläuft. Diese Eigenschaft des Maßes λ nennt man Regularität. Sie spielt im Hintergrund sowohl bei der Konstruktion als auch bei den bisher beschriebenen Eigenschaften von λ eine wichtige Rolle. Explizit taucht sie vor allem in der abstrakten Maßtheorie auf topologischen Räumen auf.

Invarianz: Ist T eine Bewegung des $\mathbb{R}^s$ (d.h. eine Schiebung = Translation, Drehung = Rotation oder Spiegelung = Reflexion), so ist mit jeder messbaren Menge A auch das Bild $T(A)$ messbar, und es gilt $\lambda(T(A)) = \lambda(A)$. Diese Eigenschaft verleiht dem Lebesgueschen Maß gegenüber allen anderen (vor allem in der Wahrscheinlichkeitstheorie) interessanten Maßen auf $\mathbb{R}^s$ eine Sonderrolle. Die Invarianz von Länge, Fläche und Volumen unter Bewegungen erscheint so selbstverständlich (ich erinnere nochmals an die Anekdote zu Beginn der Einleitung), dass ihre entscheidende Rolle erst relativ spät in der Geschichte der Mathematik explizit gewürdigt wurde, nämlich – abgesehen von wenigen Ausnahmen – erst im 20. Jahrhundert. Schlagworte dazu sind das Haarsches Maß auf lokalkompakten Gruppen und maßerhaltende Transformationen in Ergodentheorie und dynamischen Systemen. In Abschnitt 9 werde ich nochmals auf die Invarianz zurückkommen.

Eindeutigkeit: Invarianz und Normierungsbedingung $\lambda([0,1]^s) = 1$ gemeinsam bestimmen λ eindeutig, genauer: Sei μ ein translationsinvariantes, vollständiges Borelmaß auf $\mathbb{R}^s$, das auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}'$ definiert ist und $\mu([0,1]^s) = 1$ erfüllt. Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ und $\mu(A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. (μ ist also eine Fortsetzung von λ.)

6 Der Lebesguesche Integralbegriff

Die Existenz nichttrivialer σ-additiver Maße μ legt die Definition eines Integralbegriffes bezüglich μ nahe, wie sie in diesem Abschnitt entwickelt werden soll. Für $\mu = \lambda$ spricht man auch vom **Lebesgueschen Integral**. Im Hinterkopf haben wir die Darstellungen des Integrals reeller Funktionen aus Abschnitt 2. In offensichtlicher Verallgemeinerung von Treppenfunktionen definieren wir **einfache Funktionen** als Linearkombinationen $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j}$ ($n \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{R}$) von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen A_j (d.h. $A_j \in \mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}$ jene σ-Algebra auf der Menge X ist, auf der μ definiert ist). Ähnlich zu den entsprechenden Überlegungen im 3. Schritt aus Abschnitt 4 überzeugt man sich mittels gemeinsamer Verfeinerungen, dass der Wert

$$\int \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)$$

wohldefiniert ist, d.h. nicht von der speziellen Darstellung von f als Linearkombination charakteristischer Funktionen abhängt. Wir verwenden diesen Wert als Definition des Integrals der (einfachen) Funktion f bezüglich μ und schreiben dafür $\int f \, d\mu$ oder $\int_X f \, d\mu$.

Man beachte, dass für das Riemann-Integral im Wesentlichen die gleichen Überlegungen notwendig sind. Abgesehen von geringfügigen notationellen Unterschieden müssen dort die A_j lediglich Intervalle sein statt beliebige messbare Mengen. Doch auch für allgemeineres f folgt die Definition von $\int f \, d\mu$ ganz ähnlichen Ideen wie beim Riemann-Integral. Zur Erinnerung: Ist $X = [a,b]$ ein Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist der Wert des Riemann-Integrals $\int_a^b f(x) \, dx$ das Supremum über alle Untersummen oder, gleich bedeutend, über alle Integrale von Treppenfunktionen t mit $t \leq f$. Definitionsgemäß ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn das Supremum der Untersummen mit dem Infimum der Obersummen übereinstimmt. Darin kommt eine gewisse Regularität von f zum Ausdruck. Beim Lebesgueschen Zugang steckt die entsprechende aber – wie sich zeigen wird – viel weniger einschränkende Regularitätsbedingung bereits in der sogenannten **Messbarkeit von** f. Explizit lautet diese Bedingung wie folgt: Für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ liegen die Urbilder $f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\}$ in $\mathcal{A}$, sind also messbare Mengen. Die Messbarkeit von f garantiert, dass sich f auf adäquate Weise durch elementare Funktionen approximieren lässt und zeigt sich auch darin, dass in Abschnitt 2 die in der zweiten Darstellung der Fläche F auftretenden Längenmaße überhaupt definiert sind. In der Definition des Integrals für $f \geq 0$ treten nur Suprema über untere Approximationen auf, obere Approximationen sind nicht nötig. Also:

$$\int f \, d\mu = \sup \int t \, d\mu,$$

wobei sich das Supremum über alle einfachen Funktionen $t \leq f$ erstreckt. (Nochmals sei an die Analogie zum Riemann-Integral erinnert, wo man lediglich t auf die weniger umfassende Menge der Treppenfunktionen einzuschränken hat.) Darf f auch negative Werte annehmen, so zerlegen wir $f = f^+ - f^-$ in Positivteil $f^+ = \max\{f, 0\}$ und Negativteil $f^- = \max\{-f, 0\}$. Sind sowohl $\int f^+ \, d\mu$ als auch $\int f^- \, d\mu$ endlich, so heißt f **integrierbar** und

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

der **Wert des Integrals**. Schlussendlich dehnt man die Definition des Integrals in naheliegender Weise auf komplexwertige Funktionen $f = f_1 + i f_2$ aus (f_1, f_2 reellwertig), indem man

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + i \int f_2 \, d\mu$$

setzt. Will man betonen, dass die Funktion von einer Variablen x abhängt, die die Menge X durchläuft, schreibt man oft auch $\int f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x)$.

Es überrascht nicht, dass grundlegende Eigenschaften des Riemannschen Integrals auch für das Lebesguesche gelten. Selbst eine formal vollständige Herleitung (wie sie im Schulunterricht sicher für keinen der Integralbegriffe notwendig ist) erfordert kaum mehr Aufwand als für das Riemann-Integral. Meist führt folgende Strategie, die sich an der obigen schrittweisen Definition des Lebesgue-Integrals orientiert, zum Ziel: Man zeigt eine Eigenschaft zunächst für charakteristische und, vermittels Linearität, für elementare Funktionen. Sodann dehnt man sie durch Bildung von Suprema auf positives messbares f aus. (Bis hier her ähneln die Beweise typischerweise sehr jenen für das Riemann-Integral.) Für beliebiges f ergibt sich die Behauptung dann meist sehr einfach, indem man in f^+ und f^- und für komplexwertiges f auch noch in Real- und Imaginärteil zerlegt.

Linearität des Integrals: Für integrierbare Funktionen f_1, f_2 sind auch sämtliche Linearkombinationen $c_1 f_1 + c_2 f_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ integrierbar, und es gilt:

$$\int c_1 f_1 + c_2 f_2 \, d\mu = c_1 \int f_1 \, d\mu + c_2 \int f_2 \, d\mu$$

Positivität und Monotonie des Integrals: Aus $f \geq 0$ folgt $\int f \, d\mu \geq 0$, aus $f_1 \leq f_2$ folgt $\int f_1 \, d\mu \leq \int f_2 \, d\mu$. (Sofern die Integrale definiert sind.)

Messbarkeit stetiger Funktionen: Ist $X = \mathbb{R}$ oder $X = \langle a, b \rangle$, so sind sämtliche stetigen Funktionen auf X Lebesgue-messbar. (Beweisidee: Die Urbilder offener/abgeschlossener Intervalle unter stetigem f sind wieder offen/abgeschlossen, wegen der Borel-Eigenschaft also messbar. Auch an dieser Stelle lohnt eine Reminiszenz ans Riemann-Integral: Beim Beweis der Riemannintegrierbarkeit stetiger Funktionen verwendet man vor allem, dass diese auf einem kompakten Intervall sogar gleichmäßig stetig sind. Auch das ist nicht trivial!) Ähnlich erweisen sich Summen, Produkte etc. messbarer Funktionen wieder als messbar. Darüber hinaus gilt aber noch viel mehr:

Das Lebesguesche Integral als Ausweitung des Riemannschen: Sei $X = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $\mu = \lambda$ das Lebesguesche Maß eingeschränkt auf $[a,b]$ (d.h. $\mathcal{A}$ besteht aus allen in $[a,b]$ enthaltenen messbaren Mengen). Dann ist jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auch integrierbar bezüglich λ, und Riemannsches und Lebesguesches Integral stimmen überein:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda$$

Berechnung konkreter Integrale: Da der Wert eines Lebesgueschen Integrals mit dem des Riemannschen übereinstimmt, wann immer letzteres definiert ist, sind alle Berechnungsmethoden, die vom Riemannschen Begriff vertraut sind, auch hier zulässig. Insbesondere kann weiterhin der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung herangezogen werden, etwa in der folgenden (einfachen, meist aber brauchbaren) Variante: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f (d.h. $F' = f$), so gilt $\int_{[a,b]} f\ d\lambda = F(b) - F(b)$.

Berechnung höherdimensionaler Integrale, Satz von Fubini: In Abschnitt 2 wurden Darstellungen der zu berechnenden Fläche F sowohl mit Hilfe des ein- als auch des zweidimensionalen Lebesguemaßes angegeben. Ähnliche Überlegungen liegen der im Schulunterricht vielerorts beliebten Volumsberechnung von Rotationskörpern zugrunde, wo man dreidimensionale Volumina durch Integration zweidimensionaler Querschnittsflächen entlang einer dazu orthogonalen eindimensionalen Achse erhält. Ähnliche Zusammenhänge drücken sich in den Formeln

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\})$$

(sofern $f \ge 0$) und

$$\lambda^{(m+n)}(A \times B) = \lambda^{(m)}(A) \cdot \lambda^{(n)}(B)$$

für messbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aus. Als gemeinsame Verallgemeinerung für Integrale kann der Satz von Fubini angesehen werden. Hier sei er nur für den Fall $f : \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formuliert. Unter gewissen, relativ schwachen Voraussetzungen an f besagt er:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f\,d\lambda^{(m+n)} &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda^{(m)}(x)\right)\,d\lambda^{(n)}(y) = \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\lambda^{(n)}(y)\right)\,d\lambda^{(m)}(x) \end{aligned}$$

(Genaueres zu Produktmaßen und zum Satz von Fubini findet man z.B. in [2].) Höherdimensionale Integrale können also durch Iteration von niedrigdimensionalen berechnet und somit häufig schließlich auf eindimensionale zurückgeführt werden.

7 Ein resümierender Vergleich zugunsten Lebesgues

In Abschnitt 6 sollte deutlich geworden sein, dass – sobald einmal ein Maß zur Verfügung steht – die Einführung des Lebesgueschen Integralbegriffs nicht viele neue Ideen beansprucht, die substantiell über jene beim Riemannschen Zugang hinausgehen. Der wesentliche Unterschied besteht lediglich darin, dass der Lebesguesche Zugang – simpel gesprochen – nicht vom Definitionsbereich auf der x-Achse ausgeht, sondern von den Funktionswerten auf der y-Achse und als Konsequenz bezüglich der x-Achse auf einem fortgeschritteneren Maßbegriff aufbaut. Tatsächlich ist die Existenz des (σ-additiven) Lebesgueschen Maßes entscheidend und eine vergleichsweise tiefliegende Tatsache. Die nähere Betrachtung zeigt aber schnell, dass für das Verständnis der grundlegenden Ideen zum Integral, so weit ich sie bisher dargestellt habe, ein relativ naiver Maßbegriff, wie er vor allem als Längenmaß für Intervalle ohnehin in jedem Mathematikunterricht vorkommt, völlig ausgereicht hätte. Die σ-Additivität hat also bisher noch keine entscheidende Rolle gespielt hat. (Blicken wir auf den vertiefenden Hintergrund, was wir gleich tun werden, so ändert sich das radikal!) Nimmt man ein Maß als gegeben an, unterscheiden sich die Integralbegriffe nach Riemann und nach Lebesgue hinsichtlich Schwierigkeit also kaum. Durchgesetzt hat sich in der mathematischen Wissenschaft seit hundert Jahren eindeutig der Lebesguesche. Maßgeblich dafür sind vor allem die folgenden Gründe.

Mehr integrierbare Funktionen: Jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch im Lebesgueschen Sinn messbar und integrierbar. Die Umkehrung gilt aber keineswegs. Das klassische Beispiel ist die (einfache) Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, etwa auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$, genannt auch die Dirichletsche Sprungfunktion (nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859). Jede Riemannsche Untersumme von f hat den Wert 0, jede Obersumme den Wert 1, also ist f nicht Riemann-integrierbar. Im Lebesgueschen Sinne hingegen berechnet man sehr leicht $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0$. Dazu ist unter Beachtung der Definition aus Abschnitt 6 nur festzustellen, dass $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ messbar ist vom Maß 0. Tatsächlich hat sogar jede abzählbare Menge $A = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ das Maß $\lambda(A) = 0$. Denn sämtliche einelementigen Mengen $\{a_n\}$ sind als Intervalle $[a_n, a_n]$ der Länge 0 messbar vom Maß 0, also ist auch die abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ messbar vom Maß $\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\{a_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$.

Mit Hilfe von λ lässt sich durch das folgende Kriterium von Lebesgue auf sehr klare Weise beschreiben, welche Funktionen Riemann-integrierbar sind: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und wenn die Menge U der Unstetigkeitsstellen von f das Maß $\lambda(U) = 0$ hat. Ist f lediglich messbar, so gilt nach dem Satz von Lusin (Nikolai Nikolajewitsch Lusin, 1883-1950) immerhin noch folgende bemerkenswerte Aussage: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein stetiges $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(\{x : \ f(x) \ne g(x)\} < \varepsilon)$.

Weitreichende Verallgemeinerungen, vor allem in der Stochastik: Wir haben bereits in Abschnitt 6 gesehen, dass die Konstruktion des Lebesgueschen Maßes für alle Dimensionen gleich funktioniert. Insbesondere hängt die Maßtheorie nicht von der Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$ ab, während sie in der Definition des Riemannintegrals aufgrund der auftretenden Unterteilung der x-Achse in Intervalle wenigstens scheinbar eine wichtige Rolle spielt. Überdies könnten wir die Zahlenwerte der Maße von Intervallen, (verallgemeinerten) Rechtecken und elementaren Mengen anders vorgeben als für λ und (unter gewissen Regularitätsbedingungen) mit der Methode aus Abschnitt 4 weitere Maße erhalten, wie sie etwa in der Wahrscheinlichkeitstheorie auftreten. So lässt sich auf Basis der Lebesgueschen Maßtheorie eine viel elegantere und durchsichtigere Theorie aufbauen als mit Hilfe des etwas älteren Riemann-Stieltjes Integrals (Thomas Jean Stieltjes, 1856-1894). Dieses zielt – in moderner Sprechweise – ebenfalls auf die Integration nach anderen Maßen als dem Lebesgueschen ab, sei hier aber nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Als Beispiel eines wichtigen Maßes $\mu \ne \lambda$ führe ich die (standardisierte) Normalverteilung auf $\mathbb{R}$ an. Vermittels der Dichtefunktion $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ kann durch die Festsetzung $\mu(A) = \int_A \phi \, d\lambda$ ein Maß μ definiert werden, welches außerdem der Normierungsbedingung $\mu(\mathbb{R}) = 1$ genügt. Allgemein heißen solche Maße (auf einer beliebigen Menge X) **Wahrscheinlichkeitsmaße** oder **-verteilungen**. Zusammen mit X und der zugrundliegenden σ-Algebra $\mathcal{A}$ bilden sie sogenannte **Wahrscheinlichkeitsräume** $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ heißen dann **Zufallsgrößen** oder **-variable**. Die Wahrscheinlichkeit beispielsweise, dass der zufällige Wert $f(x)$ in ein gegebenes Intervall I fällt, wäre durch $\mu(f^{-1}(I))$ gegeben. Diese maßtheoretische Sicht der Wahrscheinlichkeitstheorie geht auf Andrei N. Kolmogorow (1903-1987) zurück. Sie ist zwar noch nicht einmal 80 Jahre alt, hat sich aber rasant durchgesetzt. Um stochastische Fachliteratur zu verstehen, ist ein Verständnis der maßtheoretischen Grundkonzepte also unbedingt erforderlich.

Angenehmere Grenzwerteigenschaften: Der technisch vielleicht wichtigste Grund für den Siegeszug der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie liegt in jenen Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals, welche Grenzprozesse betreffen. Insbesondere sind Vertauschungen von Integration und Limes wie in der nur bedingt gültigen Formel

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

viel unproblematischer. Diesbezügliche Mängel des Riemannschen Integrals hingegen werden schon sichtbar, wenn man auf $[0,1]$ die Funktionen $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$ betrachtet mit $A_n = \{a_k : k \leq n\}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} f_n = \mathbf{1}_A$ mit der abzählbaren Menge $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Ist A dicht in $[0,1]$ (wie etwa $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$), dann existiert im Riemannschen Sinne das rechte Integral nicht, obwohl auf der linken Seite alle Integrale und somit auch ihr Limes den Wert 0 haben. Im Lebesgueschen Sinn hingegen hat für $\mu = \lambda$ wunschgemäß auch die rechte Seite den Wert 0. Letzteres folgt auch aus allgemeinen Sätzen, in denen z.B. Monotonie ($f_0 \leq f_1 \leq \ldots$) oder dominierte Konvergenz (d.h. $|f_n| \leq g$ für ein gemeinsames integrierbares g, hier z.B. $g = \mathbf{1}_{[0,1]}$) als hinreichende Bedingungen auftreten. Noch deutlicher wird der Vorteil des Lebesgueschen Zugangs hinsichtlich Grenzwertprozessen, wenn man den Raum $\mathcal{L}_1$ aller integrierbaren Funktionen oder, allgemeiner, die Räume $\mathcal{L}_p$, $p \geq 1$, aller Funktionen f, für die $|f|^p$ integrierbar ist, betrachtet. (Besonders wichtig ist der Fall $p = 2$, welcher das unendlichdimensionale Analogon zur euklidischen Geometrie darstellt und z.B. der Theorie der Fourierreihen zugrunde liegt.) Im Lebesgueschen Kontext sind die Räume $\mathcal{L}_p$ (aufgefasst als metrische Räume bezüglich der durch die p-Norm $||f||_p = \sqrt[p]{\int |f|^p \, d\mu}$ induzierten Metrik $d_p(f,g) = ||f-g||_p$) nämlich vollständig, was Riemannsch nicht der Fall wäre. Der damit verbundene Gewinn lässt sich vergleichen mit den Vorzügen des Systems $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen für die Analysis gegenüber $\mathbb{Q}$, dem der rationalen (vgl. hierzu [7]).

8 Relevanz der Lebesgueschen Theorie für Lehrerinnen und Lehrer an Höheren Schulen

Natürlich haben die in Abschnitt 7 erläuterten Vorzüge des Lebesgueschen Integrals wenig unmittelbare Dringlichkeit für den Schulunterricht. Deshalb möchte ich das Lebesguesche Maß auch keineswegs für den Schulunterricht forcieren. Sind bei Maturanten auch nur die Grundgedanken wenigstens irgendeines Integralbegriffs (ohne jegliche technische Verfeinerung und unabhängig von äußerlichen Schemata und Formalismen) sicherer und nachhaltiger Bildungsbestand, so darf der Unterricht zum Thema Integralrechnung schon als gelungen angesehen werden.

Dennoch scheint mir die Universalität des Maßbegriffs basierend auf der (wenigstens endlichen) Additivität ein unverzichtbares Bildungsziel. Denn Messen gehört zweifelsohne zu den wichtigsten Themen, um die sich jeder Mathematikunterricht zu kümmern hat. Das gilt sowohl für die geometrische Längen-, Flächen- und Volumsmessung als auch für die Messung von Wahrscheinlichkeiten, insbesondere in Ökonomie und in den Sozialwissenschaften, sowie für zahlreiche weitere Anwendungen in den Naturwissenschaften. (Allerdings wird in Physik und Technik der Apparat der Differentialformen extrem wichtig und erfordert zusätzliche völlig neuartige, anspruchsvolle Ideen.) Auch wenn ich im vorliegenden Artikel auf das weite Feld der Anwendungen nicht näher eingehe, sollte bereits durch meine Andeutungen klar geworden sein: Die Abstraktion vielfältiger Phänomene zu einem mathematischen Begriff lohnt, auch und gerade im Hinblick auf Anwendungen!

Darüber hinaus gilt generell für alles, was im Schulunterricht behandelt wird, insbesondere an Höheren Schulen: Fachlehrerinnen und -lehrer müssen den vertiefenden Hintergrund des Schulstoffs (hier vor allem der Integralrechnung) mitsamt den wichtigsten Verbindungen und Anwendungen kennen, auch wenn diese nicht explizit unterrichtet werden. Denn nur mit solchem Hintergrundwissen ist sichergestellt, dass die wesentlichen Aspekte des tatsächlich zu unterrichtenden Stoffes nicht zu kurz kommen gegenüber oberflächlichen Beiläufigkeiten, die bei blinder Konzentration auf gewisse Aufgabentypen leicht die Oberhand bekommen und über kurz oder lang alles überwuchern.

Ein weiterer gewichtiger Grund dafür, dass Lehrerinnen und Lehrer der Mathematik wenigstens mit den Grundzügen der Lebesgueschen Theorie vertraut sein sollen, liegt darin, dass die heutige mathematische Fachliteratur fast immer den Lebesgueschen Integralbegriff verwendet. Zwar macht das in vielen Fällen gegenüber dem Riemannschen keinen Unterschied, häufig treten aber sehr wohl Sprechweisen aus der Lebesgueschen Theorie auf, an denen das Verständnis nicht scheitern darf.

Doch auch darüber hinaus hat die Maßtheorie vieles zu bieten, das auch für sich interessant ist. Gerade was den in der Schule üblichen (Riemannschen) Zugang zum Integral und seine maßtheoretischen Vertiefungen betrifft, steht das Verhältnis zwischen nötigem Aufwand und Horizonterweiterung, die sich durch die Vertiefung einstellt, besonders günstig. Insbesondere gilt das für den Gegenstand des nun folgenden, letzten Abschnitts.

9 Grenzen der Maßtheorie und Paradoxien

Wir haben in Abschnitt 7 gesehen, dass im Lebesgueschen Sinn viel mehr Funktionen integrierbar sind als im Riemannschen. Den Grund kann man darin sehen, dass die σ-Algebra $\mathcal{A}$ der Lebesgue-messbaren Mengen extrem umfangreich ist. Es stellt sich die Frage, ob vielleicht gar alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ und somit auch alle reellen Funktionen im Lebesgueschen Sinn messbar sind, d.h. ob $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt.

Die Antwort ist negativ. (Andernfalls hätten wir auf die explizite Einführung des Begriffs der σ-Algebra verzichten können.) Für den Beweis, d.h. für die Konstruktion einer nicht messbaren Menge ist zweierlei wesentlich: Erstens die Feststellung, dass das Lebesguesche Maß translationsinvariant ist (vgl. Abschnitt 5), und zweitens die Verwendung des Auswahlaxioms: Zu jeder Menge $\mathcal{M}$ paarweise disjunkter nichtleerer Mengen M gibt es eine sogenannte Auswahlmenge, d.h. eine Teilmenge A der Vereinigung aller $M \in \mathcal{M}$, die aus jedem $M \in \mathcal{M}$ genau ein Element enthält. Um den Formalismus nicht aufzublähen, will ich die Idee der Konstruktion, die auf Giuseppe Vitali (1875-1932) zurückgeht, geometrisch einkleiden. Wir betrachten das Einheitsintervall $[0,1]$ und biegen es zu einem Kreis K, wobei die Endpunkte 0 und 1 zu identifizieren, anschaulich gesprochen: zusammenzukleben sind. Die Punkte von K entsprechen also in natürlicher und bijektiver Weise den reellen Zahlen aus dem halboffenen Intervall $[0,1)$. Die Addition reeller Zahlen geht dabei über in eine Addition modulo 1. Dabei werden nur die Nachkommastellen beachtet und die ganzen Zahlen vor dem Komma ignoriert (Kreisgruppe, auch eindimensionaler Torus genannt). Zwei Elemente $x_1, x_2 \in K$ sollen nun äquivalent heißen, wenn sie sich um eine rationale Differenz unterscheiden. Da diese Relation offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv, also tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist, induziert sie eine Klasseneinteilung $\mathcal{M}$ von K in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen $M \in \mathcal{M}$, in denen jeweils alle Elemente paarweise äquivalent sind. Nun tritt das Auswahlaxiom auf den Plan. Es garantiert die Existenz einer Auswahlmenge A, die aus jedem $M \in \mathcal{M}$ genau einen Punkt a_M enthält. Jedes $x \in K$ liegt in genau einem $M = M_x$ und ist deshalb auf genau eine Weise als Summe $x = a_{M_x} + q_x$ mit $M_x \in \mathcal{M}$ und rationalem $q_x \in K$ darstellbar. Dies bedeutet, dass die Darstellung

$$K = \bigcup_{q \in K \cap \mathbb{Q}} (A + q)$$

als (abzählbare) Vereinigung der Translate $A + q = \{a + q : \ a \in A\}$ von A um den rationalen Vektor q disjunkt ist. Nehmen wir nun an, A sei messbar. Wegen der Translationsinvarianz von λ wären dann auch alle $A + q$ messbar mit $\lambda(A + q) = \lambda(A) = \alpha$. Wegen der σ-Additivität hätten wir also $1 = \lambda(K) = \sum_{q \in K \cap \mathbb{Q}} \alpha$. Ist $\alpha = 0$, so ergibt sich daraus $1 = 0$, für $\alpha > 0$ folgt $1 = \infty$, in beiden Fällen ein Widerspruch. Die Konsequenz ist, dass die Annahme der Messbarkeit von A falsch war.

Man beachte, dass aufgrund dieser Überlegungen überhaupt kein translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}$ existieren kann, das dem Einheitsintervall einen positiven endlichen Wert zuordnet und das für alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert ist. Die Verwendung der σ-Additivität in den obigen Überlegungen erweist sich als unverzichtbar. Ebenfalls unter Verwendung des Auswahlaxioms lässt sich nämlich zeigen, dass es auf der Kreisgruppe K sehr wohl endlich additive, normierte, translationsinvariante Maße gibt, die für alle Teilmengen definiert sind. Auch die Verwendung des Auswahlaxioms war in Vitalis Konstruktion unumgänglich. Dies zeigt sich an einem berühmten Resultat von Robert M. Solovay (geb. 1938), der ein Modell der übrigen Axiome der Mengenlehre angab, in dem das Auswahlaxiom nicht gilt und in dem alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar sind.

Betrachten wir höhere Dimensionen $s > 1$, so ergibt sich das folgende überraschende Bild: Auch für $s = 2$ gibt es nichttriviale endlich additive bewegungsinvariante Maße auf der Potenzmenge, für $s \geq 3$ ist das aber nicht mehr der Fall. Der Hintergrund ist das berühmte Paradoxon von (Hausdorff-)Banach-Tarski, dem die Monographie [3] gewidmet ist. Um eine möglichst leicht zugängliche Darstellung dieses Gegenstandes, dessen geniale Ideen durchaus mit vergleichsweise elementaren Mitteln verstanden werden können, habe ich mich in meinem Artikel [5] bemüht. Viel umfangreicher, aber ebenfalls elementar gehalten ist das Buch [4]. Hier rekapituliere ich daher nur das Wichtigste zum Paradoxon von Banach-Tarski: Es besteht darin, dass man (wieder unter entscheidender Verwendung des Auswahlaxioms) eine dreidimensionale Vollkugel vom Volumen 1 derart in endlich viele Teilmengen (fünf reichen) zerlegen kann, dass diese, in geeigneter Weise gedreht, verschoben und zusammengesetzt, exakt zwei Vollkugeln ergeben, jede wieder vom Volumen 1. Wären alle Bestandteile messbar gewesen, ergäbe sich wegen der Bewegungsinvarianz des dreidimensionalen Volumens der Widerspruch $1 = 2$. Also müssen unter den Teilen nicht messbare Mengen aufgetreten sein. — Es handelt sich hierbei sicher um eines der eindrucksvollsten Beispiele dafür, dass auch exotische, der physikalischen Realität scheinbar Hohn sprechende mathematische Konstruktionen Entscheidendes aussagen können über ganz Fundamentales und praktisch sehr Relevantes wie hier über die Möglichkeit Volumina zu definieren.

Literatur

[1] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 1953, 2. Auflage, McGraw Hill 1964, deutsch *Analysis*, 3. Auflage, Oldenbourg Verlag (2005).

[2] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, 1966, 2. Auflage, McGraw Hill (1974), 3. Auflage (1987), deutsch: *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenbourg Verlag (1999).

[3] Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press (1985).

[4] Leonard M. Wapner, *Aus 1 mach 2*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008). Aus dem Amerikanischen übersetzt von Harald Höfner und Brigitte Post. Originaltitel: *The Pea and the Sun*, A. K. Peters, Ltd. (2005).

[5] Reinhard Winkler, *Wie macht man 2 aus 1? Das Paradoxon von Banach-Tarski*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen, 33 (2001), 166-196. Auch unter `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/`.

[6] Reinhard Winkler, *Wir zählen bis drei – und sogar darüber hinaus*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen, 40 (2008), 129-141. Auch unter `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/`.

[7] Reinhard Winkler, *Die reellen Zahlen sind anders*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen, 41 (2009), 140-153. Auch unter `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/`.

[8] Hans Wußing, *6000 Jahre Mathematik* (2 Bände), Springer Berlin-Heidelberg (2008).